

עבודת קיץ 2021 לבוגרי כיתה ט' מופ"ת

העבודה מבוססת על תרגילים מספרים הבאים: "מתמטיקה משולבת"-מכון ויצמן, "משבצת"- גבי יקואל, "שבילים"- מט"ח, עשר בריבוע", "אפשר גם אחרת"-טכניון, מפמרון ט' – ארכימדס ויואל גבע.

חזקות ושורשים

1. חשבו ללא שימוש במחשבון:

$$1. \quad \frac{36^4 \cdot 5^0}{3^5 \cdot 2^7} \quad \text{ב.} \quad \frac{25^2 \cdot 5^{-3}}{5^4} \quad \text{ג.} \quad 60 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \quad \text{ד.} \quad \frac{(-3)^3 \cdot (-8)^4}{(-6)^4 \cdot (-4)^4}$$

2. נתונים שני הביטויים: $x = 3^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-n} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{-n}$, $y = 4^{-n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 32^n$,

כאשר n מספר טבעי.

האם טענות הבאות נכונות?

- עבור $n=2$ מתקיים $x = 12 + y$.
- הביטויים יכולים לקבל ערך שלילי.
- עבור כל n טבעי מתקיים $y > x$.
- יתכן שיתקיים $y = x$.

3. חשבו ללא שימוש במחשבון: א. $2\sqrt{5} + \sqrt{45}$ ב. $(\sqrt{162} - 2\sqrt{2}) : 7$

טכניקה אלגברית

1. א. צמצמו את הביטוי ורשמו את תחום ההצבה: $\frac{(b^2-25)(b^2+3b-10)}{(b^2-4)(b^2-3b-10)}$

1. האם נכון? נמקו.

- לא קיים ערך של b שעבורו ערך הביטוי שלילי.
- עבור כל ערך של b הביטוי חיובי או שווה ל-0.
- עבור כל ערך של b בתחום ההצבה הביטוי חיובי.
- עבור כל ערך חיובי של b בתחום ההצבה הביטוי גדול מ-1.

2. פתרו את המשוואות הבאות:

1. $3x - x^2 = 0$

2. $9x^2 - 18 = 0$

3. $-x^2 - 9 = 0$

4. $x^2 - 8x + 15 = 0$

5. $5x^2 - 7x + 2 = 0$

6. $\frac{3}{x-2} = \frac{4}{x+1} + \frac{3}{x^2-2x} + \frac{12}{x^2+x}$

7. $\frac{1}{x^2-5x} + \frac{1}{x+5} = \frac{12}{25-x^2} + \frac{1}{x^2+5x}$

8. $\frac{x-3}{2x-12} - \frac{2}{x-6} = 1 - \frac{1}{x^2-12x+36}$

9. $\frac{x^2-16}{x^2-4x} + \frac{x^2+x}{x^2+9x+8} = \frac{16}{x^2+8x}$

10. $\frac{1}{x^3-4x^2+4x} - \frac{1}{x^2-2x} = \frac{x-3}{x^3-2x^2}$

תשובות: 6. $x=3, X=-7$.7 $X=-2$.8 $X=7, x=4$.9 $x=-2, x=-4$.10 $x=3, X=1$

3. נתונה משוואה: $\frac{x+5}{x^2-6x-7} + \frac{x}{x^2-x-2} = \frac{x-4}{x^2-9x+14}$

1. פתרו את המשוואה.

2. לכל אחד מפתרונות המשוואה הוסיפו את הפרמטר החיובי k. לאחר מכן הכפילו את התוצאות זו בזו

וקיבלו 14. מצאו את ערכו של הפרמטר k.

4. *פתרו את המשוואות הבאות:

1. $(x^2 - 6x + 13)^2 = 25$

2. $(x^2 + x)(x^2 + x - 8) + 12 = 0$

3. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-3x} - \frac{x^2-3x+6}{x^2-3x-2} = 1$

תשובות: 1. $x=4, X=2$.2 $x=-2, x=1, x=2, X=-3$.3 $x=2, X=1$

5. פתרו את המערכות הבאות:

$$\begin{cases} 6x - 4y = 3 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases} .1$$

$$\begin{cases} (y+1)^2 - (y-2)^2 = x - 9 \\ y + 8 = (x+4)^2 - (x+3)^2 \end{cases} .2$$

$$\begin{cases} y^2 - 10x + 50 = 0 \\ x - y = 5 \end{cases} .3$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + y = 9 \end{cases} .4$$

$$\begin{cases} (x+3)(y-1) = 4 \\ (x-2)(y+2) = -4 \end{cases} .5$$

$$\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 11 \\ 2x + y = 7 \end{cases} .6$$

$$\begin{cases} y(2x+1) = 3 \\ x(y-4) = -3 \end{cases} .7$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 50 \end{cases} .8$$

6. פתרו את אי השוויונות הבאים:

$$x^2 + 4x > 0 \quad .1$$

$$x^2 - x - 20 \leq 0 \quad .2$$

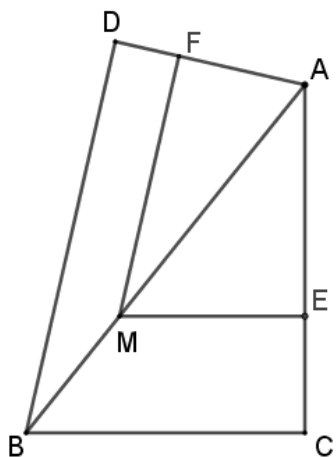
$$9x^2 - 30x + 250 \geq 0 \quad .3$$

$$4x^2 - 12x + 9 > 0 \quad .4$$

שאלות מילוליות

1. נתון שבר שבו המכנה גדול מהמונה ב-5. אם נוסיף 6 למונה יתקבל שבר חדש שגדול ב-1 מהשבר המקורי. מצאו את השבר המקורי.
2. שתי רכבות יצאו מעכו לבאר שבע, מרחק 250 ק"מ. הראשונה יצאה בשעה 9:00 והשנייה - בשעה 9:30. מהירות הרכבת השנייה גבוהה ב-25% ממהירות הרכבת הראשונה. שתי הרכבות הגיעו לבאר שבע בו זמנית. מצאו את מהירויות הרכבות ואת זמן הגעתן לבאר שבע.
3. אריה תכנן לנסוע באופניים לאגם המרוחק מביתו 50 ק"מ במהירות מסוימת. לאחר 3 שעות נסיעה במהירות מתוכננת, עצר למנוחה במשך שעה ואז המשיך בדרכו והגביר את מהירותו הקודמת ב-2 קמ"ש. כתוצאה מכך, הגיע לאגם שעה לפני הזמן המתוכנן. מצאו את המהירות המתוכננת.
4. אחמד, הבעלים של חנות שוקולד, מכר ביום ה' כמות מסוימת של אריזות במחיר קבוע לאריזה. הכנסתו ביום ה' הייתה 800 ₪. ביום ו' החליט אחמד למכור כל אריזה בהנחה של 10 ₪. ביום הזה הוא מכר 5 אריזות יותר מאשר ביום ה' אבל הכנסתו הייתה רק 750 ₪. כמה אריזות שוקולד מכר בשני הימים?
5. אם נקטין אורך מלבן ב-20% ונגדיל את רוחבו ב-5 ס"מ, נקבל מלבן ששטחו גדול ב-30 סמ"ר משטח המלבן הנתון. אם נגדיל את אורך המלבן הנתון ב-5 ס"מ ונקטין את רוחבו ב-5 ס"מ נקבל מלבן ששטחו קטן ב-50 סמ"ר משטח המלבן הנתון. מצאו את צלעות המלבן הנתון.

גיאומטריה



1. לשני משולשים ישרי זווית ABC ו-ABD יש יתר משותף AB. מהנקודה M הנמצאת על היתר מורידים את האנכים ME ו-MF לצלעות AD ו-AC בהתאמה.

1. הוכיחו: $AF \cdot CE = AE \cdot FD$

2. הוכיחו: $MF \cdot CB = ME \cdot BD$

3. נתון: $AD = 3$ ס"מ, $AF = 2$ ס"מ, $BC = 4.5$ ס"מ, $AC = 6$ ס"מ.

חשבו את שטח הטרפז BCEM.

2. AE הוא חוצה זווית BAC במשולש ABC.

הנקודה D נמצאת מחוץ למשולש ABC כך

ש-DE = 50 ס"מ והיקף המשולש CDE הוא 105 ס"מ.

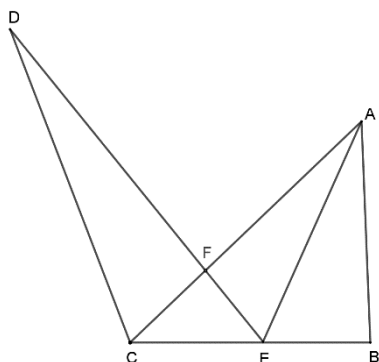
AC ו-DE נחתכים בנקודה F.

נתון: $AC = 40$ ס"מ, $BC = 28$ ס"מ, $AB = 2BE$.

1. הוכיחו: $\triangle ABC \sim \triangle ECD$

2. הוכיחו: $\triangle ABC \sim \triangle EFC$

3. חשבו את היקף המשולש EFC.



3. הקטע EF מקביל לצלע BC של משולש ABC.

התיכון AD של המשולש חותך את הקטע EF

בנקודה G.

נתון: שטח הטרפז BDGE גדול ב-25%

משטח המשולש AGE.

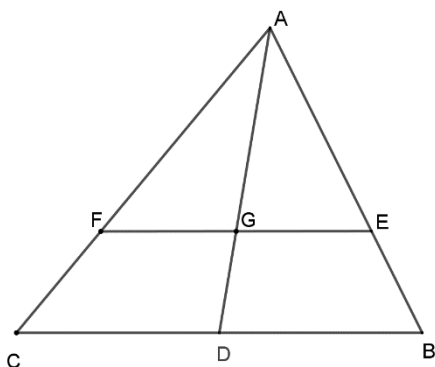
1. הוכיחו: התיכון לצלע AB של המשולש ABC

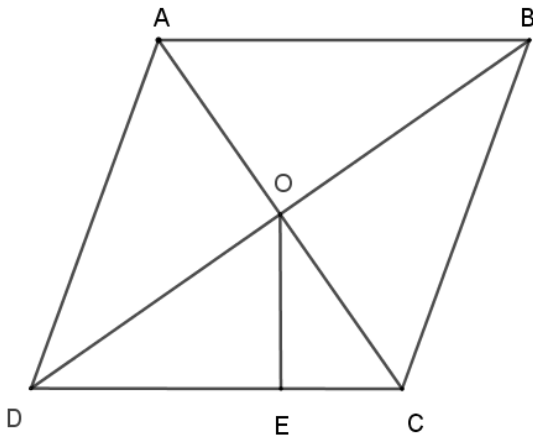
עובר דרך הנקודה G.

2. הוכיחו: $GE = GF$.

3. קבעו מה גדול יותר: שטח המשולש BCG

או שטח המשולש AFG. נמקו את תשובתכם.





4. אלכסוני המעוין ABCD נחתכים בנקודה O.

הנקודה E נמצאת על הצלע CD.

נתון: שטח המעוין 600 סמ"ר, $OE = 12$ ס"מ

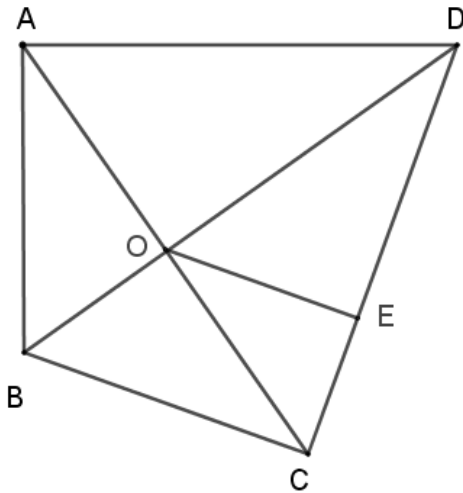
$$\angle OED = \angle OEC, CE < DE$$

1. חשב את אורך CE.

2. הנקודות F ו-G נמצאות בהתאמה על הקטעים

DE ו-DO כך ש $EO \parallel FG$. נתון: $CE = FG$.

חשבו את אורך DF.



5. בדלתון ABCD: $AB = BC, CD = AD, \angle A = 90^\circ$

אלכסוני הדלתון נחתכים בנקודה O.

הנקודה E נמצאת על הצלע CD כך ש $EO \parallel BC$.

$$\text{נתון: } \frac{S_{\triangle DEO}}{S_{\triangle CEO}} = 4$$

1. חשבו את היחס $\frac{EO}{BC}$.

2. נתון: שטח הטרפז BCEO הוא 9 סמ"ר.

חשבו את היקף הדלתון.

פונקציות וגרפים

1. לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות קבעו את שיעורי הקדקוד, נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי עליה וירידה, תחומי חיוביות ושליליות (אם יש כאלה) ושרטטו סקיצה של הגרף.

$$1. y = -2(x - 1)^2 + 8$$

$$2. f(x) = (x + 1)(x - 5)$$

$$3. p(x) = x^2 - 7x + 10$$

$$4. k(x) = -2x^2 + 12x - 19$$

2. א. פרבולה בעלת מקסימום חותכת את ציר ה-x בנקודות $(-4,0)$ ו- $(8,0)$.

אילו מבין פונקציות הבאות מתאימות לפרבולה נתונה?

$$(1) g(x) = -(x + 4)(x - 8) \quad (2) f(x) = -(x - 4)(x + 8)$$

ב. ישר העובר דרך נקודות $(-4,0)$ ו- $(0,8)$ חותך את הפרבולה הנתונה בנקודות A ו-B.

מצאו את משוואת הישר ואת שיעורי הנקודות A ו-B.

ג. מצאו עבור אילו ערכי x הישר נמצא מעל הפרבולה.

ד. האם הטענות הבאות נכונות? נמקו את תשובתכם.

(1) לישר $y=35$ ולפרבולה הנתונה יש נקודה משותפת אחת בלבד.

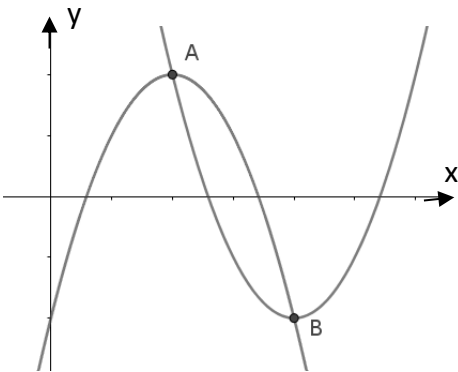
(2) לישר $y=30$ ולפרבולה הנתונה יש שתי נקודות משותפות ברביע הראשון.

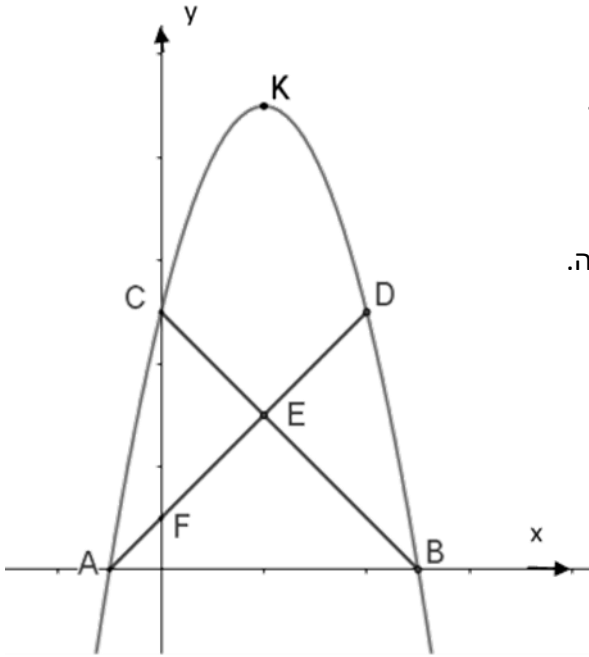
3. נתונות גרפים של הפונקציות: $f(x) = x^2 - 8x + 14$ ו- $g(x) = 2 - (x - 2)^2$

1. מצאו את שיעורי הנקודות המסומנות בשרטוט.

2. פתרו את אי השוויון: $x^2 - 8x + 14 > 2 - (x - 2)^2$

3. כמה נקודות חיתוך יש לכל אחד מהגרפים עם הישר $y=3$?





4. לפניכם גרף של פונקציה ריבועית $f(x) = -x^2 + 4x + c$

החותך את ציר ה- x בנקודות A ו-B ואת ציר ה- y בנקודה C.

K היא נקודת המקסימום של הפונקציה. הקטעים CB ו-AD

נחתכים בנקודה E הנמצאת על ציר הסימטריה של הפונקציה.

אורך הקטע AB הוא 6 יחידות.

1. מצאו את משוואת ציר הסימטריה.

2. מצאו את שיעורי הנקודות A, B, C, K.

3. מצאו את משוואת הקטע BC.

4. מצאו את שיעורי הנקודות E, F ו-D.

5. מצאו את שטח המשולש CFE.

5. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x .

א. מגדירים פונקציה חדשה $g(x) = f(x) + 3$.

(1) היעזרו בגרף הנתון ושרטטו סקיצה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מהם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$?

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(4) קבעו כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = 1$

וכמה פתרונות יש למשוואה $g(x) = 1$. נמקו.

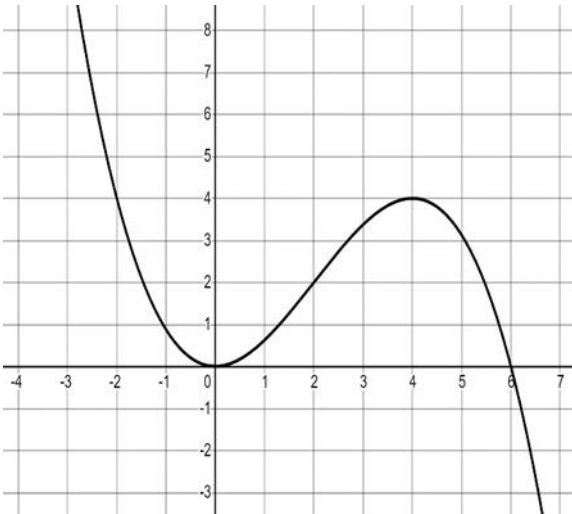
ב. מגדירים פונקציה חדשה $h(x) = -f(x)$.

(1) היעזרו בגרף הנתון ושרטטו סקיצה של הפונקציה $h(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של $h(x)$ ואת סוגן.

(3) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $h(x)$.

(4) מצאו את התחום בו הפונקציה $h(x)$ יורדת ושלילית.

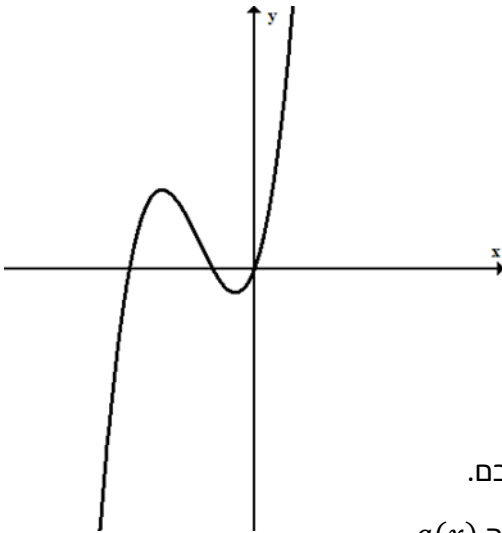


ג. מגדירים פונקציה חדשה $t(x) = f(x + 2)$.

- (1) היעזרו בגרף הנתון ושרטטו סקיצה של הפונקציה $t(x)$.
- (2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $t(x)$ עם הצירים.
- (3) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $t(x)$.
- (4) קבעו האם ערך המכפלה $t(6) \cdot t(-6)$ הוא חיובי או שלילי. נמקו את תשובתכם.

ד. מגדירים פונקציה חדשה $k(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x)$.

- (1) היעזרו בגרף הנתון ושרטטו סקיצה של הפונקציה $k(x)$.
- (2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $k(x)$ עם הצירים.
- (3) קבעו איזה מהסימנים $<, >, =$ מתאים בין שני הביטויים $k(4)$ ו- $3 \cdot k(-1)$. נמקו.



6. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x .

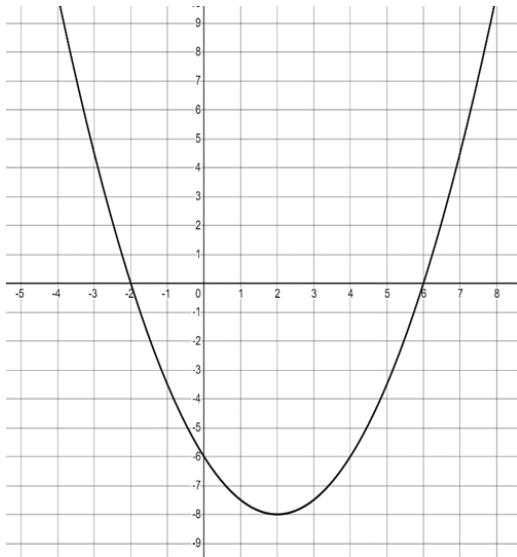
נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים הן

$$(0,0), (-2,0), (-6,0)$$

ונקודות הקיצון שלה הן $(-5,4)$ ו- $(-1,-1)$.

מגדירים פונקציה חדשה $g(x) = |f(x)|$.

- א. היעזרו בגרף הנתון ושרטטו סקיצה של הפונקציה $g(x)$.
- ב. מהם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$?
- ג. קבעו כמה פתרונות יש למשוואה $g(x) = -1$. נמקו את תשובתכם.
- ד. קבעו עבור אילו ערכים של c הישר $y = c$ חותך את גרף הפונקציה $g(x)$.
 - (1) בשתי נקודות
 - (2) בשלוש נקודות
 - (3) בארבע נקודות



7. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x .

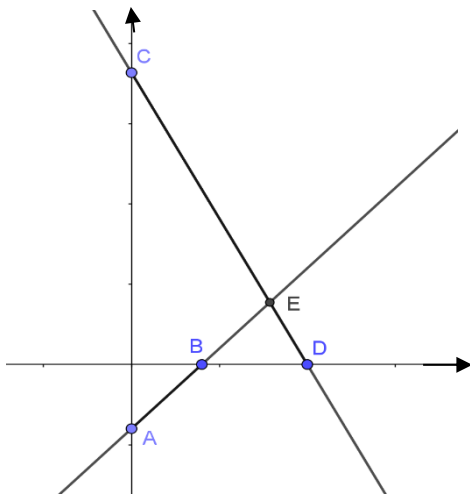
$$h(x) = \frac{1}{f(x)}$$

- א. מצאו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$?
- ג. מהם תחומי החיוביות והשליליות של $h(x)$?
- ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של $h(x)$.
- ה. מצאו את נקודת הקיצון של $h(x)$ ואת סוגה.
- ו. על-סמך הסעיפים הקודמים, שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

גאומטריה אנליטית

1. ישר עם שיפוע m ($0 > m$) עובר דרך הנקודה $A(1,8)$.

- א. הביעו באמצעות m את משוואת הישר.
- ב. שטח המשולש שהישר יוצר עם הצירים הוא 25. מצאו את m .



2. בציור מתוארים שני ישרים AB ו- CD .

- משוואת הישר AB היא $x + y = 3$.
- שני הישרים נחתכים בנקודה $E(5,2)$.
- נתון כי שטח המשולש AEC הוא 37.5 יח"ר.
- א. מצאו את שיעורי נקודה C .
- ב. חשבו את שטח המשולש BDE .
- ג. חשבו את שטח המרובע $OBEC$ (O – ראשית הצירים)

3. נתון מרובע $ABCD$ שקדקודיו בנקודות: $A(2,5)$, $B(8,8)$, $C(11,5)$, $D(1,0)$.

- א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.
- ב. E נקודה על הישר העובר דרך נקודות C ו- D .

מצאו את השיעורים של הנקודה E כך שהמרובע $ABCE$ יהיה מקבילית.

4. במשולש ישר זווית ABC ($\sphericalangle C = 90^\circ$).

נתון: $A(2,-1)$, $C(4,1)$. הקדקוד B נמצא על ציר ה- y .

1. מצאו את משוואות הצלעות של המשולש ABC .

2. מצאו את משוואת הגובה ליתר AB .

3. האם הנקודה $(7,2)$ נמצאת על הגובה הזה.

5. אחד מקדקודי ריבוע $ABCD$ הוא $A(1, -3)$ ומשוואת אחד מאלכסוניו היא $y=2x$.

1. מצאו את משוואת האלכסון השני ואת קדקוד C .

2. מצאו את אורך צלע הריבוע.

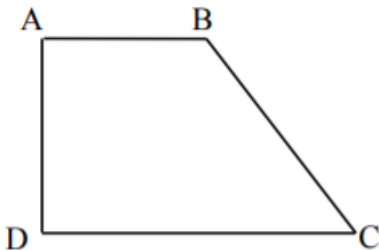
3. מצאו את שני הקדקודים הנותרים.

6. משוואת האלכסון BD במעוין $ABCD$ היא $y=-2x+4$ וקדקוד A בנקודה $(6,2)$.

1. מצאו את קדקוד C .

2. צלע AB מקבילה לציר ה- x . מצאו את שטח המעוין.

טריגונומטריה במישור



1. בטרפז ישר זווית $ABCD$ נתון: $AB \parallel CD$, $\sphericalangle D = 90^\circ$,

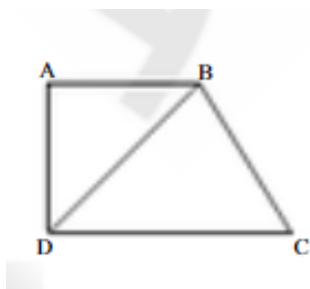
$BC = 4$ ס"מ, $AB = 3$ ס"מ, $DC = 5$ ס"מ.

1. חשבו את הזווית החדה של הטרפז.

2. חשבו את שטח הטרפז.

2. אחת מצלעות המלבן ארוכה ב- 21 ס"מ מהצלע השניה. הזווית החדה שבין האלכסונים היא בת 38° .

חשבו את צלעות המלבן.



3. בטרפז ישר-זווית $ABCD$ ($AD \perp DC$, $AB \parallel DC$)

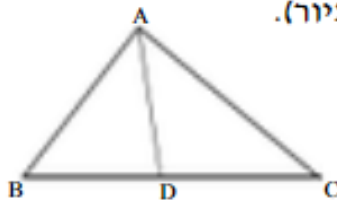
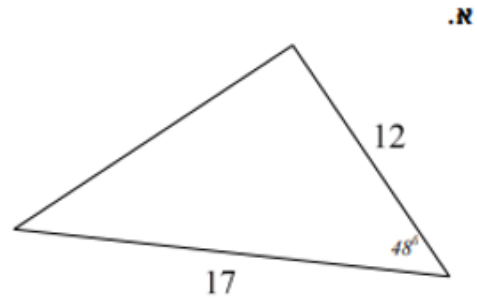
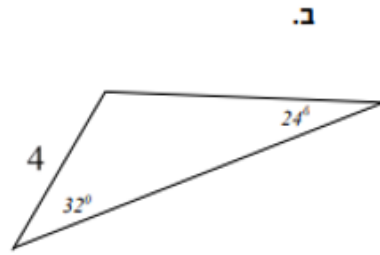
האלכסון DB שווה לבסיס DC .

נתון: $\sphericalangle BDC = \alpha$, $AB = m$.

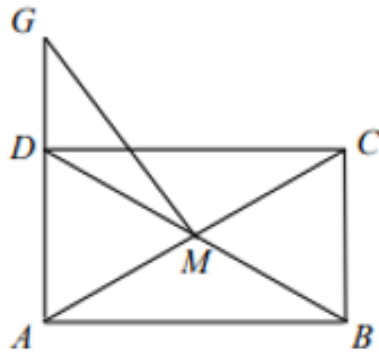
הבע באמצעות m ו- α את שטח הטרפז.

תשובה:
$$\frac{m^2 \tan \alpha (1 + \cos \alpha)}{2 \cos \alpha}$$

4. חשבו את שטחי המשולשים הבאים:



5. AD הוא חוצה הזווית A במשולש ABC (ראה ציור).
 נתון: $\angle BAC = 80^\circ$, $BD = 4$ ס"מ, $DC = 5$ ס"מ.
 א. מצא את היחס בין הצלע AC לצלע AB.
 ב. מצא את אורך הצלע AB.
תשובה: א. 5:4 . ב. 6.169 ס"מ.



6. אלכסוני המלבן ABCD נפגשים בנקודה M.
 הנקודה G נמצאת על המשך הצלע AD.
 נתון: $AD = 3$ ס"מ, $AB = 4$ ס"מ, $DG = 1.2$ ס"מ.
 חשבו את MG.

הסתברות

1.

אם בוחרים באקראי תושב בעיר מסוימת, ההסתברות שעיניו כחולות היא 0.2, ההסתברות ששיערו בלונדיני היא 0.3 וההסתברות שעיניו כחולות וגם שיערו בלונדיני היא 0.1.
 א. בוחרים באקראי תושב ששיערו בלונדיני.
 מהי ההסתברות שעיניו כחולות?
 ב. בוחרים באקראי תושב שעיניו כחולות.
 מהי ההסתברות ששיערו בלונדיני?



תשובות: א. $\frac{1}{3}$. ב. $\frac{1}{2}$.

2. בסוף השנה ייבחנו תלמידי בית ספר מסוים בשני מבחני מתכונת בזה אחר זה. ידוע כי 80% מהתלמידים מצליחים במבחן הראשון ו-70% מהתלמידים מצליחים במבחן השני. 10% מהתלמידים לא מצליחים באף אחד מהמבחנים.

- א. בוחרים באקראי תלמיד.
מהי ההסתברות שהוא הצליח לפחות במבחן אחד?
ב. בוחרים באקראי תלמיד שהצליח לפחות במבחן אחד.
מהי ההסתברות שהוא הצליח במבחן הראשון?
ג. בוחרים באקראי תלמיד שהצליח לכל היותר במבחן אחד.
מהי ההסתברות שהוא לא הצליח באף מבחן?

תשובות: א. 0.9 . ב. $\frac{8}{9}$. ג. $\frac{1}{4}$.

3. בבית ספר מסוים יש שתי מגמות : מגמה מדעית ומגמה עיונית. ידוע כי מספר הבנים בבית הספר גדול פי 2 ממספר הבנות. הבנות הלומדות במגמה עיונית מהוות $\frac{1}{4}$ מתלמידי בית הספר והבנים הלומדים במגמה מדעית מהווים $\frac{2}{5}$ מתלמידי בית הספר. בוחרים באקראי תלמיד.

- א. מהי ההסתברות שנבחר בן הלומד במגמה עיונית?
ב. מהי ההסתברות שנבחר בן, אם ידוע שהתלמיד לומד במגמה עיונית?
ג. ידוע שנבחרה בת. מהי ההסתברות שהיא לומדת במגמה עיונית?

תשובות: א. $\frac{4}{15}$. ב. $\frac{16}{31}$. ג. $\frac{3}{4}$.

4. בקופסה מונחים 4 מפתחות, ורק אחד מהם מתאים לדלת. מוציאים מהקופסה מפתח באקראי. אם הוא אינו מתאים לדלת, מוציאים מפתח אחר מבלי להחזיר את המפתח הראשון.

- א. מה ההסתברות שהמפתח הראשון שמוציאים יהיה המפתח המתאים לדלת?
ב. מה ההסתברות שהמפתח השני יתאים אם ידוע שהמפתח הראשון אינו מתאים?

תשובות: א. 0.25 . ב. 0.25

5. בארגז אשר במחסן יש נורות. מחצית הנורות הן מתוצרת הארץ ומחצית הנורות הן מתוצרת חוץ.

- מבין הנורות מתוצרת הארץ יש הסתברות של 2% שהנורה פגומה.
מבין הנורות מתוצרת חוץ יש הסתברות של 3% שהנורה פגומה.
בוחרים באקראי נורה אחת מתוך הארגז.

- א. מה ההסתברות שהנורה שנבחרה היא פגומה מתוצרת הארץ?
ב. מה ההסתברות לבחור נורה תקינה?